MODUL 1

Teori Himpunan

Prof. S.M. Nababan, Ph.D.
Drs. Warsito, M.Pd.

PENDAHULUAN

Himpunan sebagai *koleksi* (pengelompokan) dari objek-objek yang dinyatakan dengan jelas, banyak digunakan dan dijumpai diberbagai bidang *bukan* hanya dibidang matematika. Dalam kegiatan sehari-hari banyak himpunan dipakai baik secara langsung maupun tidak langsung. Dalam bidang matematika *konsep* himpunan dinyatakan dengan *jelas* agar dapat dipelajari dan dikembangkan tanpa menimbulkan keraguan.

Teori himpunan merupakan landasan konsep matematika untuk relasi, fungsi, urutan dan lain-lain yang banyak digunakan dalam analisa dan geometri.

Modul ini terdiri dari dua Kegiatan Belajar. Dalam Kegiatan Belajar 1, Anda mempelajari konsep himpunan dan operasi-operasi untuk himpunan. Teorema-teorema yang menyangkut operasi-operasi himpunan diberikan yang disertai dengan beberapa bukti teorema.

Dalam Kegiatan Belajar 2, Anda mempelajari gabungan, irisan dan perkalian kartesis himpunan-himpunan sebarang. Konsep gabungan, irisan dan perkalian kartesis untuk himpunan diberikan disertai dengan contoh-contoh dan teorema-teorema yang menyangkut operasi-operasi tersebut.

Setelah mempelajari modul ini, diharapkan Anda memiliki kemampuan untuk memberikan konsep-konsep dan teorema-teorema yang menyangkut himpunan.

Secara lebih terinci, setelah selesai mempelajari modul ini diharapkan Anda dapat:

1. menentukan himpunan dengan menggunakan operasi-operasi himpunan;
2. menentukan gabungan dan irisan himpunan-himpunan sebarang yang banyaknya berhingga atau tak hingga;
3. menentukan perkalian kartesis untuk beberapa himpunan dengan menggunakan definisinya;
4. menentukan operasi himpunan yang berkaitan dengan gabungan, irisan, dan perkalian kartesis.

KEGIATAN BELAJAR 1

Himpunan dan Operasi untuk Himpunan

Dalam Kegiatan Belajar 1 ini Anda mempelajari konsep himpunan, jenis-jenis himpunan dengan contoh-contohnya. Selain itu, diberikan juga operasi-operasi untuk himpunan yang memperluas pengetahuan Anda mengenai himpunan.

Himpunan adalah koleksi (pengelompokan) objek-objek yang dinyatakan dengan jelas. Sebagai contoh:

1. Himpunan semua mahasiswa dari Jakarta.
2. Himpunan semua bilangan bulat.
3. Himpunan huruf dari *a* sampai *j*.

Himpunan dituliskan dengan huruf besar *A*, *B*, *C*, *D* dan seterusnya disertai dengan keterangan atau penjelasan (ciri-ciri) dari objek-objek yang di dalamnya. Sebagai contoh

$$A = \{x \mid \text{penjelasan (ciri-ciri) } x \text{ atau keterangan tentang } x\}.$$

Sebagai ilustrasi:

$$M = \{x \mid x \text{ mahasiswa dari Jakarta}\}$$

$$\mathbb{Z} = \{x \mid x \text{ bilangan bulat}\}$$

$$A = \{x \mid x \text{ huruf dari } a \text{ sampai } j\}$$

$$= \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\}.$$

Kita tulis $x \in A$ menyatakan *x* anggota (elemen) *A* dan $x \notin A$ jika *x* bukan anggota *A*.

Himpunan yang tak mempunyai anggota disebut himpunan kosong, dinyatakan dengan notasi $\varnothing$.

Contoh 1.1.1 :

$$\varnothing = \{x \mid x \text{ bilangan asli dengan } x^2 = 2\}$$

$$\varnothing = \{x \mid x \text{ orang yang tingginya} \geq 20 \text{ meter}\}$$

$$\varnothing = \{x \mid x^2 < 0\}.$$

Perhatikan bahwa $\varnothing \neq \{\varnothing\}$, $\{\varnothing\}$ adalah himpunan yang terdiri dari satu elemen yaitu himpunan kosong $\varnothing$.

Himpunan-himpunan bilangan yang terkenal adalah:

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, ...\}$ = himpunan semua bilangan asli,

$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, ...\}$ = himpunan semua bilangan bulat,

$\mathbb{Q} = \left\{ {}^{p}\!/_{q} \mid p, q \text{ bilangan bulat}, q \neq 0 \right\}$ = himpunan semua bilangan rasional

$\mathbb{R}$ = himpunan semua bilangan real.

Dua himpunan *A* dan *B* dikatakan *sama*, ditulis $A = B$, jika kedua himpunan mempunyai anggota-anggota yang sama.

Himpunan *A* dikatakan *himpunan bagian* dari himpunan *B*, ditulis $A \subseteq B$, jika setiap anggota *A* juga anggota *B*.

Contoh: $\{1, 2\} \subseteq \{1, 2, 3\}$; $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$.

Kita katakan *A himpunan bagian sejati* dari himpunan *B*, ditulis $A \subset B$ atau $A \underset{\neq}{\subset} B$, jika $A \subseteq B$ tetapi $A \neq B$.

Jelas bahwa:

(i) $A = B$ jika dan hanya jika $A \subseteq B$ dan $B \subseteq A$.

(ii) Jika $A \subseteq B$ dan $B \subseteq C$ maka $A \subseteq C$.

Teorema 1.1.1 Untuk setiap himpunan *A* berlaku:

(i) $\varnothing \subseteq A$,

(ii) $A \subseteq A$.

Himpunan *A* dikatakan *himpunan hingga* jika banyaknya anggota *A* adalah berhingga; dikatakan *tak hingga* jika banyaknya anggota *A* adalah tak hingga.

Contoh: $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ adalah himpunan hingga dan himpunan bilangan asli $\mathbb{N}$ adalah himpunan tak hingga.

Himpunan kuasa dari himpunan *A*, ditulis $\mathcal{P}(A)$, adalah koleksi semua himpunan bagian dari *A*.

Contoh 1.1.2 :

1) $A = \{1, 2, 3, 4\}$.

$$\mathcal{P}(A) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}\}.$$

2) Untuk himpunan A yang terdiri dari n anggota, dapat diperlihatkan bahwa $\mathscr{P}(A)$ mempunyai 2^n elemen.
3) Untuk himpunan bilangan asli $\mathbb{N}$, $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ adalah himpunan tak hingga.

Perhatian 1.1.1 :
i) Jika $B \subseteq A$ maka $B \in \mathscr{P}(A)$.
ii) Jika $a \in A$ maka $\{a\} \subset A$ dan $\{a\} \in \mathscr{P}(A)$.

OPERASI UNTUK HIMPUNAN

Untuk dua himpunan, kita dapat melakukan operasi-operasi tertentu sehingga menghasilkan himpunan lain seperti operasi penjumlahan dan perkalian untuk bilangan bulat. Kita sebut $\mathscr{U}$ sebagai himpunan *semesta*, dimana setiap himpunan yang dibicarakan (ditinjau) adalah himpunan bagian dari $\mathscr{U}$.

Definisi 1.1.1 Misalkan $A \subseteq \mathscr{U}$ dan $B \subseteq \mathscr{U}$.

a) *Gabungan* dari himpunan *A* dan *B*, ditulis $A \cup B$, adalah himpunan yang memuat elemen-elemen di *A atau* di *B* atau ada di keduanya.
Jadi
$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ atau } x \in B\}.$$
b) *Irisan* dari himpunan *A* dan *B*, ditulis $A \cap B$, adalah himpunan yang memuat elemen-elemen di *A dan* di *B*.
Jadi
$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ dan } x \in B\}.$$
c) Himpunan *A* dan *B* dikatakan *saling lepas* (disjoint) jika $A \cap B$ adalah himpunan kosong.

Ilustrasi dari ketiga operasi di atas diberikan dalam gambar berikut, yang dikenal sebagai *diagram Venn*.

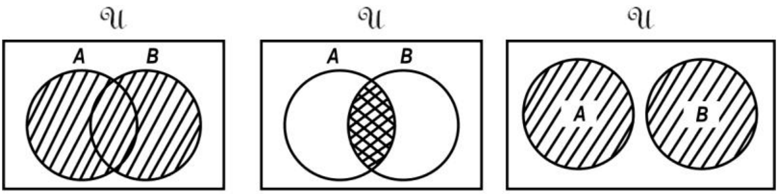


Diagram $A \cup B$ Diagram $A \cap B$ Diagram *A* dan *B* saling lepas

Perhatian 1.1.2 Jika himpunan yang dibicarakan sudah jelas maka himpunan semestanya tidak perlu disebutkan lagi.

Contoh 1.1.3 $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$; $B=\{3,4,5,6,7,8,9,10,11\}$.
Maka $A\cup B=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11\}$; $A\cap B=\{3,4,5,6,7,8\}$.

Contoh 1.1.4 $A=\{x|\ 2\le x<4\}$; $B=\{3<x\le 7\}$.
Maka $A\cup B=\{x|\ 2\le x\le 7\}$; $A\cap B=\{x|\ 3<x<4\}$.

Contoh 1.1.5 $\mathcal{U}$ adalah himpunan orang Indonesia.
$A=\{x|\ x\in\mathcal{U},\ x \text{ berumur lebih 10 tahun}\}$;
$B=\{x|\ x\in\mathcal{U},\ x \text{ berumur kurang 20 tahun}\}$.
Maka $A\cup B=\{x|\ x\in\mathcal{U}\}=\mathcal{U}$; dan
$A\cap B=\{x|\ x\in\mathcal{U},\ x \text{ berumur antara 10 tahun dan 20 tahun}\}$.

Contoh 1.1.6 $A=\{x|\ 2<x<3\}$, $\mathbb{N}$ himpunan bilangan asli.
Maka $A\cap\mathbb{N}=\varnothing$, atau *A* dan $\mathbb{N}$ saling lepas.

Di bawah ini diberikan teorema yang menyangkut operasi himpunan.

Teorema 1.1.2 Untuk himpunan-himpunan $A\subseteq\mathcal{U}$, $B\subseteq\mathcal{U}$ dan $C\subseteq\mathcal{U}$, berlaku:
a) $A\cup\mathcal{U}=\mathcal{U}$
b) $A\cup\varnothing=A$
c) $A\cup B=B\cup A$
d) $A\cap\mathcal{U}=A$
e) $A\cap\varnothing=\varnothing$
f) $A\cap B=B\cap A$
g) $\varnothing\subseteq A\cap B\subseteq A\subseteq A\cup B$
h) $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$
i) $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$ (hukum distributif)
j) $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$
k) $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$ (hukum distributif)

Bukti: Sebagai latihan, Anda buktikan a) s/d g).

h) Menunjukkan $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$.

($\Rightarrow$) Akan diperlihatkan $A \cup (B \cup C) \subseteq (A \cup B) \cup C$.

Ambil $x \in A \cup (B \cup C)$, x sebarang. Maka $x \in A$ atau $x \in B \cup C$. Ini memberikan $x \in A$ atau $x \in B$ atau $x \in C$, yang berarti $x \in A \cup B$ atau $x \in C$.

Jadi $x \in (A \cup B) \cup C$ dan $A \cup (B \cup C) \subseteq (A \cup B) \cup C$.

($\Leftarrow$) Akan diperlihatkan $(A \cup B) \cup C \subseteq A \cup (B \cup C)$.

Ambil $x \in (A \cup B) \cup C$, x sebarang. Maka $x \in A \cup B$ atau $x \in C$. Ini memberikan $x \in A$ atau $x \in B$ atau $x \in C$, yang berarti $x \in A$ atau $x \in (B \cup C)$.

Jadi $x \in A \cup (B \cup C)$ dan $(A \cup B) \cup C \subseteq A \cup (B \cup C)$.

i) Menunjukkan $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

($\Rightarrow$) Akan diperlihatkan $A \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Ambil $x \in A \cup (B \cap C)$, x sebarang. Maka $x \in A$ atau $x \in B \cap C$.

Jika $x \in A$ maka $x \in A \cup B$ dan $x \in A \cup C$.

Jadi $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$ dan $A \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

($\Leftarrow$) Akan diperlihatkan $(A \cup B) \cap (A \cup C) \subseteq A \cup (B \cap C)$.

Ambil $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$, x sebarang. Maka $x \in A \cup B$ dan $x \in A \cup C$. Ini memberikan $x \in A$ atau $x \in B$ dan $x \in A$ atau $x \in C$, sehingga diperoleh $x \in A$ atau $x \in B$ dan $x \in C$. Ini berarti $x \in A \cup (B \cap C)$. Jadi $(A \cup B) \cap (A \cup C) \subseteq A \cup (B \cap C)$.

j) Menunjukkan $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.

($\Rightarrow$) Akan diperlihatkan $A \cap (B \cap C) \subseteq (A \cap B) \cap C$.

Ambil $x \in A \cap (B \cap C)$, x sebarang. Maka $x \in A$ dan $x \in B \cap C$. Ini memberikan $x \in A$ dan $x \in B$ dan $x \in C$, sehingga didapat $x \in (A \cap B) \cap C$. Jadi $A \cap (B \cap C) \subseteq (A \cap B) \cap C$.

($\Leftarrow$) Akan diperlihatkan $(A \cap B) \cap C \subseteq A \cap (B \cap C)$.

Ambil $x \in (A \cap B) \cap C$, x sebarang. Maka $x \in A \cap B$ dan $x \in C$. Ini memberikan $x \in A$ dan $x \in B$ dan $x \in C$, sehingga diperoleh $x \in A \cap (B \cap C)$. Jadi $(A \cap B) \cap C \subseteq A \cap (B \cap C)$.

k) Menunjukkan $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$.

($\Rightarrow$) Akan diperlihatkan $A\cap(B\cup C)\subseteq(A\cap B)\cup(A\cap C)$.

Ambil $x\in A\cap(B\cup C)$, x sebarang. Maka $x\in A$ dan $x\in B\cup C$. Ini memberikan $x\in A$ dan $(x\in B$ atau $x\in C)$, sehingga didapat $x\in A$ dan $x\in B$ atau $x\in A$ dan $x\in C$. Jadi $x\in A\cap B$ atau $x\in A\cap C$, yaitu $x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$ dan diperoleh $A\cap(B\cup C)\subseteq(A\cap B)\cup(A\cap C)$.

($\Leftarrow$) Akan diperlihatkan $(A\cap B)\cup(A\cap C)\subseteq A\cap(B\cup C)$.

Ambil $x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$, x sebarang. Maka $x\in A\cap B$ atau $x\in A\cap C$. Ini memberikan $x\in A$ dan $x\in B$ atau $x\in A$ dan $x\in C$, sehingga diperoleh $x\in A$ dan ($x\in B$ atau $x\in C$), yang berarti $x\in A\cap(B\cup C)$. Jadi $(A\cap B)\cup(A\cap C)\subseteq A\cap(B\cup C)$.

Definisi 1.1.2 Misalkan $A\subseteq\mathcal{U}$ dan $B\subseteq\mathcal{U}$.

a) *Selisih* himpunan *A* terhadap *B*, ditulis $A-B$, adalah himpunan elemen-elemen di *A* yang tidak termuat di *B*; jadi

$$A-B=\{x\mid x\in A \text{ dan } x\notin B\}.$$

b) *Komplemen* dari *A*, ditulis $\overline{A}$, adalah $\mathcal{U}-A$; jadi $\overline{A}=\{x\mid x\notin A\}$.

c) *Selisih simetris* dari dua himpunan *A* dan *B*, ditulis $A+B$, didefinisikan sebagai

$$A+B=(A-B)\cup(B-A).$$

Diagram Venn untuk himpunan-himpunan di atas diberikan sebagai berikut .

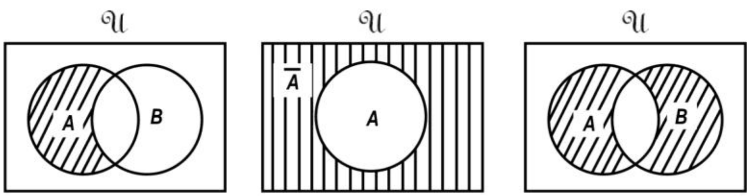


Diagram $A-B$ Diagram $\overline{A}$ Diagram $A+B$

Contoh 1.1.7 $\mathcal{U} = \left\{ n \mid n \text{ asli}, 1 \le n \le 20 \right\}$.

$A = \left\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\right\}$; $B = \left\{5,7,8,10,11,12,13\right\}$.

Maka

$$A - B = \left\{1,2,3,4,6,9\right\} \; ; \; B - A = \left\{11,12,13\right\}$$

$$\overline{A} = \left\{11,12,13,14,15,16,17,18,19,20\right\}$$

$$\overline{B} = \left\{1,2,3,4,6,9,14,15,16,17,18,19,20\right\}$$

$$A + B = \left\{1,2,3,4,6,9,11,12,13\right\} .$$

Contoh 1.1.8 $\mathcal{U} = \mathbb{R}$; $A = \left\{ x \mid x \ge 15 \right\}$; $B = \left\{ x \mid x \le 20 \right\}$.

Maka

$$A - B = \left\{ x \mid x > 20 \right\} = (20, \infty)$$

$$B - A = \left\{ x \mid x < 15 \right\} = (-\infty, 15)$$

$$\overline{A} = \{ x \mid x < 15 \} = (-\infty, 15) \; ; \; \overline{B} = \{ x \mid x > 20 \} = (20, \infty)$$

$$A + B = \left\{ x \mid x < 15 \text{ atau } x > 20 \right\} = (-\infty, 15) \cup (20, \infty) .$$

Contoh 1.1.9 $\mathcal{U} = \mathbb{R}$; $A = \left\{ x \mid x \in \mathbb{Z}, \; x \ge 10 \right\}$; $B = \left\{ x \mid x \in \mathbb{R}, \; x < 20 \right\}$.

Maka

$$A - B = \left\{ x \mid x \in \mathbb{Z}, \; x \ge 20 \right\}$$

$$B - A = \left\{ x \mid x \in \mathbb{R}, \; x < 20 \text{ dan } x \notin \left\{10,11,12,13,14,15,16,17,18,19\right\} \right\}$$

$$\overline{A} = \left\{ x \mid x \in \mathbb{R}, \; x \notin \{10,11,12,13,14,\ldots\} \right\} \; ; \qquad \overline{B} = \left\{ x \mid x \in \mathbb{R}, \; x \ge 20 \right\}$$

$$A + B = \left\{ x \mid x \in \mathbb{Z}, \; x \ge 20 \right\} \cup \left\{ x \mid x \in \mathbb{R}, \; x < 20 \text{ dan } x \notin \left\{10,11,12,13,14,15,16,17,18,19\right\} \right\}$$

Di bawah ini diberikan teorema yang menyangkut komplemen himpunan.

Teorema 1.1.3 Untuk himpunan $A \subseteq \mathcal{U}$ dan $B \subseteq \mathcal{U}$ berlaku:

a) $A \cup \overline{A} = \mathcal{U}$

b) $A \cap \overline{A} = \varnothing$

c) $\overline{\varnothing} = \mathcal{U}$

d) $\overline{\mathcal{U}} = \varnothing$

e) $\overline{\overline{A}} = A$

f) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ (Dalil De Morgan)

g) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ (Dalil De Morgan)

Bukti: Anda buktikan sendiri untuk (a), (b), (c), dan (d) sebagai latihan.

e) Dibuktikan $\overline{\overline{A}} = A$.

($\Rightarrow$) Akan diperlihatkan $\overline{\overline{A}} \subseteq A$.

Ambil $x \in \overline{\overline{A}}$. Maka $x \notin \overline{A}$. Jadi $x \in A$ dan $\overline{\overline{A}} \subseteq A$.

($\Leftarrow$) Akan diperlihatkan $A \subseteq \overline{\overline{A}}$.

Ambil $x \in A$. Maka $x \notin \overline{A}$ dan ini memberikan $x \in \overline{\overline{A}}$. Jadi $A \subseteq \overline{\overline{A}}$.

f) Akan ditunjukkan $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

($\Rightarrow$) Akan diperlihatkan $\overline{A \cup B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$.

Ambil $x \in \overline{A \cup B}$. Maka $x \notin A \cup B$. Ini berarti $x \notin A$ dan $x \notin B$. Ini memberikan $x \in \overline{A}$ dan $x \in \overline{B}$ sehingga diperoleh $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$.

($\Leftarrow$) Akan ditunjukkan $\overline{A} \cap \overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$.

Ambil $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$. Maka $x \in \overline{A}$ dan $x \in \overline{B}$. Ini memberikan $x \notin A$ dan $x \notin B$ sehingga didapat $x \notin A \cup B$ atau $x \in \overline{A \cup B}$.
Jadi $\overline{A} \cap \overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$.

g) Akan ditunjukkan $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

($\Rightarrow$) Akan diperlihatkan $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cup \overline{B}$.

Ambil $x \in \overline{A \cap B}$. Maka $x \notin A \cap B$. Ini berarti $x \notin A$ atau $x \notin B$. Ini memberikan $x \in \overline{A}$ atau $x \in \overline{B}$ sehingga $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$.
Jadi $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cup \overline{B}$.

($\Leftarrow$) Akan diperlihatkan $\overline{A} \cup \overline{B} \subseteq \overline{A \cap B}$.

Ambil $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$. Maka $x \in \overline{A}$ atau $x \in \overline{B}$. Ini berarti $x \notin A$ atau $x \notin B$. Ini memberikan $x \notin A \cap B$ atau $x \in \overline{A \cap B}$.
Jadi $\overline{A} \cup \overline{B} \subseteq \overline{A \cap B}$.

Teorema berikut menyangkut selisih dua himpunan.

Teorema 1.1.4 Diberikan dua himpunan *A* dan *B*. Maka
a) $A-\varnothing = A$.
b) $\varnothing - A = \varnothing$.
c) $A-B = A\cap \overline{B}$.
d) $A\subseteq B$ jika dan hanya jika $A-B=\varnothing$.
e) Jika $A\subseteq B$ maka $A-C\subseteq B-C$.

Bukti: Bukti untuk (a), (b), (e) Anda kerjakan sendiri sebagai latihan.
c) Diperlihatkan $A-B = A\cap \overline{B}$.
($\Rightarrow$) Akan ditunjukkan $A-B\subseteq A\cap \overline{B}$.
Ambil $x\in A-B$, x sebarang. Maka $x\in A$ dan $x\notin B$. Ini memberikan $x\in A$ dan $x\in \overline{B}$. Jadi $x\in A\cap \overline{B}$ dan $A-B\subseteq A\cap \overline{B}$.
($\Leftarrow$) Akan diperlihatkan $A\cap \overline{B}\subseteq A-B$.
Ambil $x\in A\cap \overline{B}$, x sebarang. Maka $x\in A$ dan $x\in \overline{B}$. Ini memberikan $x\in A$ dan $x\notin B$ atau $x\in A-B$. Jadi $A\cap \overline{B}\subseteq A-B$.

d) Diperlihatkan $A\subseteq B \Leftrightarrow A-B=\varnothing$.
($\Rightarrow$) Akan ditunjukkan jika $A\subseteq B$ maka $A-B=\varnothing$.
Karena $A\subseteq B$ maka $A\cap \overline{B}=\varnothing$ dan dari (c) didapat $A-B=\varnothing$.
($\Leftarrow$) Akan ditunjukkan jika $A-B=\varnothing$ maka $A\subseteq B$.
Dari hubungan (c) didapat $A\cap \overline{B}=\varnothing$. Ini memberikan jika $x\in A$ maka $x\notin \overline{B}$ atau $x\in B$. Jadi $A\subseteq B$.

Teorema berikut menyangkut selisih simetris himpunan.

Teorema 1.1.5 Untuk setiap himpunan *A* dan *B* berlaku:
a) $A+A=\varnothing$
b) $A+\varnothing = A$
c) $A+B=B+A$
d) $(A+B)+C = A+(B+C)$.

Bukti: Bukti a), b), dan c) diperoleh langsung dari definisi $A+B$.

d) $(A+B)+C=\left((A+B)-C)\cup(C-(A+B)\right)$

$A+(B+C)=\left(A-(B+C))\cup((B+C)-A\right)$

Ambil $x\in(A+B)+C$, x sebarang.

Maka $x\in((A+B)-C)\cup(C-(A+B))$. Ini memberikan $x\in(A+B)-C$ atau $x\in C-(A+B)$. Jika $x\in(A+B)-C$, maka $x\in A+B$ dan $x\notin C$. Ini berarti $x\in(A-B)\cup(B-A)$ dan $x\notin C$. Dengan demikian $x\in(A-B)$ dan $x\notin C$ atau $x\in(B-A)$ dan $x\notin C$. Jika $x\in(A-B)$ dan $x\notin C$ maka $x\in A$ dan $x\notin B$ dan $x\notin C$.

Ini memberikan $x\in A$ dan $x\notin B\cup C$, yaitu $x\in A-(B\cup C)$ sehingga $x\in A-(B+C)$.

Jika $x\in B-A$ dan $x\notin C$ maka $x\in B$ dan $x\notin A$ dan $x\notin C$. Ini berarti $x\in B-(A\cup C)$. Dengan demikian $x\in(B+C)-A$.

Jadi $x\in A-(B+C)$ atau $x\in(B+C)-A$.

Ini berarti $x\in(A-(B+C))\cup((B+C)-A)$ atau $x\in A+(B+C)$.

Jika $x\in C-(A+B)$, maka $x\in C$ dan $x\notin A+B$. Ini berarti $x\in C$ dan $x\notin(A-B)\cup(B-A)$ sehingga $x\in C-(A-B)$ dan $x\in C-(B-A)$ atau ditulis $x\in\left(C-(A-B)\right)\cap\left(C-(B-A)\right)$.

Dengan demikian $x\in(A-(B+C))\cup((B+C)-A)$ atau $x\in A+(B+C)$.

Jadi $(A+B)+C\subseteq A+(B+C)$.

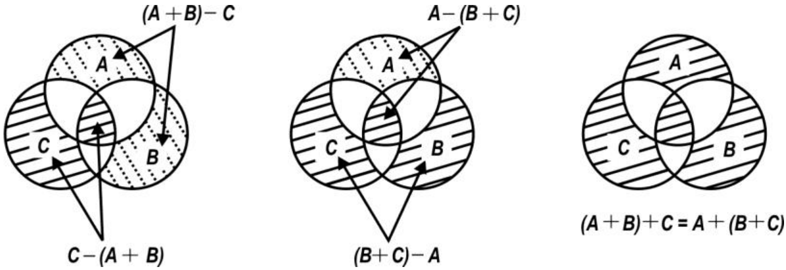
Sebaliknya, ambil $x\in A+(B+C)$.

Maka $x\in A-(B+C)$ atau $x\in(B+C)-A$. Jika $x\in A-(B+C)$ maka $x\in A$ dan $x\notin B+C$. Ini berarti $x\in A-(B-C)$ dan $x\in A-(C-B)$ atau $x\in(A-(B-C))\cap(A-(C-B))$.

Dengan demikian $x\in(A+B)+C$.

Jika $x\in(B+C)-A$ maka $x\in B+C$ dan $x\notin A$. Ini berarti $x\in(B-C)\cup(C-B)$ dan $x\notin A$. Dengan demikian $x\in B-C$ dan $x\notin A$ atau $x\in C-B$ dan $x\notin A$. Ini memberikan $x\in(B-C)-A$ atau $x\in(C-B)-A$. Jadi $x\in(A+B)+C$ sehingga diperoleh $A+(B+C)=(A+B)+C$.

Ilustrasi dari himpunan-himpunan yang muncul dalam pembuktian dapat dilihat di bawah ini.



LATIHAN

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, kerjakanlah latihan berikut!

1) Untuk setiap himpunan *A* dan *B* berikut, tentukan $A \cap B$ dan $A \cup B$.
   a) $A = \{a, b, c, d\}$; $B = \{c, d, e, f, g\}$
   b) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$; $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$
   c) $A = \{1, 2, 3, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}\}$; $B = \{2, \{1, 2\}, \{1, 3\}\}$.

2) Gunakan diagram Venn untuk memberikan ilustrasi hubungan berikut.
   a) $A \cup B \subseteq C$
   b) $A \subseteq B \cup C$.

3) Buktikan pernyataan berikut.
   a) $A \subseteq B$ jika dan hanya jika ($\Leftrightarrow$) $A \cup B = B$
   b) $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A$
   c) Jika $A \subseteq B \cup C$ dan $A \cap B = \varnothing$ maka $A \subseteq C$
   d) Jika $A \subseteq C$ dan $B \subseteq C$, maka $A \cup B \subseteq C$
   e) Jika $A \cup B \subseteq C \cup D$, $C \subseteq A$ dan $A \cap B = \varnothing$, maka $B \subseteq D$.

4) Buktikan:
   a) $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$
   b) $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$. Berikan contoh bahwa kebalikannya tidak berlaku.

5) Perlihatkan bahwa
   a) $(A \cup (B \cap C)) \cap C = (A \cup B) \cap C$
   b) $(A - B) - C = (A - C) - (B - C)$
   c) $(A \cup B) \cap (C \cup D) = (A \cap C) \cup (A \cap D) \cup (B \cap C) \cup (B \cap D)$

Petunjuk Jawaban Latihan

1) Gunakan definisi irisan dan gabungan.
2) Gunakan diagram Venn.
3) (a) dan (b) gunakan definisi $\cup$, $\cap$ dan $\subseteq$.
   (c) ambil $x \in A$ dan perlihatkan $x \in C$ dengan mengingat $A \cap B = \varnothing$ dan $A \subseteq B \cup C$.
   (d) Gunakan definisi $\cup$ dan $\subseteq$.
   (e) Ambil $x \in B$ dan perlihatkan $x \in D$. Karena $A \cap B = \varnothing$ dan $C \subseteq A$ maka $x \notin C$ dan $x \notin A$. Selanjutnya gunakan hubungan $A \cup B \subseteq C \cup D$ untuk memperoleh $x \in D$.
4) a) Gunakan definisi $\mathcal{P}(A)$.
   b) Gunakan definisi $\mathcal{P}(A)$. Ambil $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3\}$, $A \cup B = \{1, 2, 3\}$. Jelas $\mathcal{P}(A \cup B) \subseteq \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$.
5) a) Gunakan Teorema 1.2 (i) dan (k). Khususnya $(A \cup C) \cap C = C$.
   b) Gunakan definisi *A* – *B*.
   c) Gunakan hukum distributif Teorema 1.2 (i) atau (k).

RANGKUMAN

Diberikan dua himpunan $A \subseteq \mathcal{U}$, $B \subseteq \mathcal{U}$ dan $\mathcal{U}$ himpunan semesta. Maka

1. $A \subseteq B$ jika $\forall x \in A$ maka $x \in B$
2. $A = B$ jika $A \subseteq B$ dan $B \subseteq A$

3. $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ atau } x \in B\}$
4. $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ dan } x \in B\}$
5. $A - B = \{x \mid x \in A \text{ dan } x \notin B\}$
6. $\overline{A} = \{x \mid x \notin A\}$, $\overline{A}$ komplemen dari A
7. $A + B = (A - B) \cup (B - A)$ (selisih simetris)
8. $\overline{\overline{A}} = A$
9. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$; $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
10. $\mathscr{P}(A) = \{B \mid B \subseteq A\}$, himpunan kuasa dari *A*.

TES FORMATIF 1

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat!

1) Diberikan himpunan $A = \{1, 2, 3, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$ dan $B = \{2, \{2, 3\}, \{1, 2\}\}$. Maka ....
   A. $A \cup B = \{1, 2, 3, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$
   B. $A \cup B = \{1, 2, 3, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$
   C. $A \cap B = \{\{2, 3\}\}$
   D. $A \cap B = \{1, 2, \{2, 3\}\}$

2) Diberikan $A = \{x \mid x < 2\}$ dan $B = [1, 4]$. Maka ....
   A. $A \cup B = \{x \mid x < 4\}$
   B. $A \cup B = \{x \mid x \leq 3\}$
   C. $A \cap B = \{x \mid 1 \leq x < 2\}$
   D. $A \cap B = \{x \mid 1 < x < 2\}$

3) Diberikan $A \subseteq B \cup C$ dan $B \cap C \neq \varnothing$. Maka ....
   A. $A \cap C \neq \varnothing \Rightarrow A \subseteq B$
   B. $A \cap C \neq \varnothing \Rightarrow B \subseteq A$

C. $A \cap C = \varnothing \Rightarrow B \subseteq A$
D. $A \cap C = \varnothing \Rightarrow A \subseteq B$

4) Jika A mempunyai 5 buah anggota, maka ....
A. $\mathscr{P}(A) = 30$
B. $\mathscr{P}(A) = 32$
C. $\mathscr{P}(A) = 34$
D. $\mathscr{P}(A) = 36$

5) Misalkan P dan Q dua rumus (formula) sehingga $\forall x\left[P(x) \Rightarrow Q(x)\right]$ ($P(x)$ mengakibatkan $Q(x)$). Jika $A = \{x \mid P(x)\}$ dan $B = \{x \mid Q(x)\}$, maka ....
A. $A \subset B$
B. $A \subseteq B$
C. $B \subset A$
D. $B \subseteq A$

6) Jika $A = \mathbb{R}$, himpunan bilangan real; $B = \mathbb{Q}$, himpunan bilangan rasional dan C himpunan bilangan irasional, maka ....
A. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cap C$
B. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$
C. $(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C)$
D. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cup C)$

7) Diberikan $A = \left(-\infty, 5\right] \cup (7, \infty)$, maka ....
A. $\bar{A} = \left(5, 7\right]$
B. $\bar{A} = \left[5, 7\right)$
C. $\bar{A} = \left[5, 7\right]$
D. $\bar{A} = \left(5, 7\right)$

8) Untuk pertanyaan berikut, manakah yang salah (tidak benar) ....
A. $\overline{\left(5, 8\right]} = \left(-\infty, 5\right] \cup \left(8, \infty\right)$
B. $\overline{\left(3, 7\right)} \cup \left[6, 8\right] = \left(-\infty, 3\right] \cup \left[6, \infty\right)$

C. $\overline{(1,4)} \cap [4,10] = (-8,1] \cup [4,10]$

D. $\overline{(-\infty,3)} \cup (6,\infty) = [3,\infty)$

9) Untuk tiga himpunan *A*, *B* dan *C* berikut, manakah yang berlaku?

A. $A \not\subseteq B$ dan $B \not\subseteq C \Rightarrow A \not\subseteq C$

B. $A \neq B$ dan $B \neq C \Rightarrow A \neq C$

C. $A \in B$ dan $B \not\subseteq C \Rightarrow A \notin C$

D. $A \subseteq B$ dan $B \in C \Rightarrow A \notin C$

10) Diberikan $A = \left\{ 2x \middle| \, x \in \mathbb{Z}^+ \right\}$, $B = \left\{ 2x-1 \middle| \, x \in \mathbb{Z}^+ \right\}$ dan $C = \left\{ 3x \middle| \, x \in \mathbb{Z}^+ \right\}$,

dimana $\mathbb{Z}^+$ himpunan bilangan bulat positif.
Maka manakah yang tidak benar ....

A. $A \cap C = \left\{ 6x \middle| \, x \in \mathbb{Z}^+ \right\}$

B. $B \cap C = \left\{ 3(2x-1) \middle| \, x \in \mathbb{Z}^+ \right\}$

C. $A - C = \left\{ 2(3x-2) \middle| \, x \in \mathbb{Z}^+ \right\} \cup \left\{ 2(3x-1) \middle| \, x \in \mathbb{Z}^+ \right\}$

D. $B - C = \left\{ 6x-5 \middle| \, x \in \mathbb{Z}^+ \right\} \cup \left\{ 6x-2 \middle| \, x \in \mathbb{Z}^+ \right\}$

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 1 yang terdapat di bagian akhir modul ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 1.

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{Jumlah Jawaban yang Benar}}{\text{Jumlah Soal}} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan: 90 - 100% = baik sekali
80 - 89% = baik
70 - 79% = cukup
< 70% = kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan Kegiatan Belajar 2. **Bagus!** Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi materi Kegiatan Belajar 1, terutama bagian yang belum dikuasai.

KEGIATAN BELAJAR 2

Gabungan, Irisan, dan Perkalian Kartesis Himpunan-himpunan Sebarang

Dalam Kegiatan Belajar 1, Anda telah mempelajari konsep Himpunan dan Operasi-operasi yang menyangkut himpunan. Dalam Kegiatan Belajar 2 ini, Anda mempelajari operasi-operasi yang menyangkut himpunan-himpunan yang banyaknya sebarang termasuk tak hingga dan perkalian Kartesis beberapa himpunan. Perkalian Kartesis ini memberikan ide (gagasan) untuk sistem koordinat di bidang dan di ruang. Himpunan indeks yang digunakan *boleh* merupakan himpunan berhingga atau himpunan tak hingga, *tidak* selalu bilangan-bilangan asli atau bilangan bulat.

Misalkan I suatu himpunan indeks dan setiap $i \in I$ dikaitkan dengan suatu himpunan A_i. Maka koleksi himpunan $\{A_i \mid i \in I\}$ dinyatakan sebagai *keluarga berindeks* dari himpunan-himpunan A_i. Sebagai contoh, misalkan P himpunan semua bilangan prima dan $\forall i \in P$, sebut $E_i = \{n \in \mathbb{N} \mid i \text{ faktor dari } n\}$. Maka $\{E_i \mid i \in P\}$ adalah keluarga berindeks. Selanjutnya untuk setiap bilangan real *r* sebut x_r merupakan himpunan bilangan rasional yang lebih kecil dari *r*. Maka $\{x_r \mid r \in \mathbb{R}\}$ merupakan keluarga berindeks. Perhatikan bahwa keluarga $\{E_i \mid i \in P\}$ dapat ditulis sebagai barisan tak hingga $A_1, A_2, A_3, \ldots$, dengan mengambil $A_1 = E_2$, $A_2 = E_3$, $A_3 = E_5$ dan seterusnya, tetapi tidak dapat untuk keluarga $\{x_r \mid r \in \mathbb{R}\}$.

Gabungan dari keluarga berindeks $\{A_i \mid i \in I\}$ didefinisikan sebagai himpunan dari semua elemen-elemen yang terletak pada satu atau lebih himpunan A_i di dalam keluarga. Umumnya dinyatakan sebagai $\bigcup_{i \in I} A_i$. Jadi

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{a \mid \exists i \in I \ni a \in A_i\}.$$

Irisan dari keluarga berindeks $\{A_i \mid i \in I\}$ didefinisikan sebagai himpunan dari semua elemen-elemen yang terletak dalam semua himpunan A_i di dalam keluarga. Umumnya dinyatakan sebagai $\bigcup_{i \in I} A_i$. Jadi

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{a \mid a \in A_i, \forall i \in I\}.$$

Perhatian 1.2.1 Bila himpunan indeks I terdiri dari dua elemen, misalnya $I = \{1, 2\}$, maka

$$\bigcup_{i \in I} A_i = A_1 \cup A_2 \text{ dan } \bigcap_{i \in I} A_i = A_1 \cap A_2 .$$

Bila $I = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ dilakukan *iterasi* untuk pasangan gabungan dan pasangan irisan, yaitu

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \left(\cdots((((A_1 \cup A_2) \cup A_3) \cup A_4) \cdots) A_n\right), \text{ dan}$$

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \left(\cdots((((A_1 \cap A_2) \cap A_3) \cap A_4) \cdots) A_n\right).$$

Teorema berikut bersifat trivial.

Teorema 1.2.1 Misalkan $\{A_i \mid i \in I\}$ keluarga berindeks dari himpunan-himpunan A_i. Maka $\forall i_0 \in I$ berlaku

$$A_{i_0} \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i \text{ dan } \bigcap_{i \in I} A_i \subseteq A_{i_0} .$$

Bukti: Ambil $x \in A_{i_0}$ sebarang. Karena $i_0 \in I$ maka $x \in \bigcup_{i \in I} A_i$. Jadi $A_{i_0} \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$. Selanjutnya jika $x \in \bigcap_{i \in I} A_i$ maka $x \in A_i$, $\forall i \in I$, khususnya $x \in A_{i_0}$. Jadi $\bigcap_{i \in I} A_i \subseteq A_{i_0}$.

Teorema berikut menyangkut keluarga berindeks.

Teorema 1.2.2 Misalkan $\{A_i \mid i \in I\}$ keluarga berindeks dari himpunan-himpunan A_i dan B suatu himpunan sebarang. Bila $A_i \subseteq \mathcal{U}$ dan $B \subseteq \mathcal{U}$, dimana $\mathcal{U}$ himpunan semesta, maka:

(a) $B \cup \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) = \bigcup_{i \in I} (B \cup A_i)$

(b) $B \cap \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) = \bigcup_{i \in I} (B \cap A_i)$

(c) $B \cup \left(\bigcap_{i \in I} A_i \right) = \bigcap_{i \in I} (B \cup A_i)$

(d) $B \cap \left(\bigcap_{i \in I} A_i \right) = \bigcap_{i \in I} (B \cap A_i)$

(e) $\overline{\left(\bigcup_{i \in I} A_i \right)} = \bigcap_{i \in I} \overline{A}_i$

(f) $\overline{\left(\bigcap_{i \in I} A_i \right)} = \bigcup_{i \in I} \overline{A}_i$.

Bukti: Di sini dibuktikan untuk (a), (c), dan (f), sedangkan yang lain Anda kerjakan sendiri sebagai latihan.

(a) $(\Rightarrow)$ Ambil $x \in B \cup \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right)$ sebarang. Maka $x \in B$ atau $x \in \bigcup_{i \in I} A_i$.

Jika $x \in B$ maka $x \in B \cup A_i, \forall i \in I$ sehingga diperoleh $x \in \bigcup_{i \in I} (B \cup A_i)$. Selanjutnya jika $x \in \bigcup_{i \in I} A_i$, maka $x \in A_{i_0}$ untuk suatu $i_0 \in I$. Ini memberikan $x \in B \cup A_{i_0}$ untuk suatu $i_0 \in I$, sehingga didapat $x \in \bigcup_{i \in I} (B \cup A_i)$. Jadi diperoleh

$$B \cup \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) \subseteq \bigcup_{i \in I} (B \cup A_i).$$

($\Leftarrow$) Sebaliknya ambil $x \in \bigcup_{i \in I} (B \cup A_i)$ sebarang. Maka $x \in B \cup A_{i_0}$ untuk suatu $i_0 \in I$. Jika $x \in B$ maka $x \in B \cup \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right)$. Selanjutnya jika $x \in A_{i_0}$ maka $x \in \bigcup_{i \in I_0} A_i$ dan mengakibatkan $x \in B \cup \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right)$. Jadi diperoleh $\bigcup_{i \in I} (B \cup A_i) \subseteq B \cup \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right)$.

(c) ($\Rightarrow$) Ambil $x \in B \cup \left(\bigcap_{i \in I} A_i \right)$ sebarang. Maka $x \in B$ atau $x \in \bigcap_{i \in I} A_i$. Jika $x \in B$ maka $x \in B \cup A_i, \forall i \in I$. Ini memberikan $x \in \bigcap_{i \in I} (B \cup A_i)$. Selanjutnya jika $x \in \bigcap_{i \in I} A_i$ maka $x \in A_i, \forall i \in I$ yang menyebabkan $x \in B \cup A_i, \forall i \in I$. Ini memberikan $x \in \bigcap_{i \in I} (B \cup A_i)$ dan diperoleh $B \cup \left(\bigcap_{i \in I} A_i \right) \subseteq \bigcap_{i \in I} (B \cup A_i)$.

($\Leftarrow$) Sebaliknya ambil $x \in \bigcap_{i \in I} (B \cup A_i)$ sebarang. Maka $x \in B \cup A_i, \forall i \in I$. Jika $x \in B$ maka $x \in B \cup \left(\bigcap_{i \in I} A_i \right)$. Jika $x \in A_i, \forall i \in I$ maka $x \in \bigcap_{i \in I} A_i$, yang menyebabkan $x \in B \cup \left(\bigcap_{i \in I} A_i \right)$. Jadi diperoleh $\bigcap_{i \in I} (B \cup A_i) \subseteq B \cup \left(\bigcap_{i \in I} A_i \right)$.

(f) Ambil $x \in \mathscr{U}$ sebarang. Maka $x \in \overline{\left(\bigcap_{i \in I} A_i \right)} \Leftrightarrow x \notin \bigcap_{i \in I} A_i \Leftrightarrow x \notin A_{i_0}$ untuk suatu $i_0 \in I \Leftrightarrow x \in \overline{A}_{i_0}$ untuk suatu $i_0 \in I \Leftrightarrow x \in \bigcup_{i \in I} \overline{A}_i$.

PERKALIAN KARTESIS

Perkalian Kartesis dua himpunan memperumum konsep bidang Euklides dimensi dua dan sistem koordinat Kartesis di bidang-*xy*. Ini berkaitan dengan pasangan terurut dua objek. *Pasangan terurut* dua objek *a* dan *b* adalah objek (a,b) yang memenuhi syarat bahwa $(a,b)=(x,y)$ jika dan hanya jika $a=x$ dan $b=y$.

Perkalian silang dua himpunan *A* dan *B*, ditulis $A\times B$, didefinisikan sebagai

$$A\times B=\{(a,b)\,|\,a\in A,\ b\in B\}.$$

Contoh 1.2.1 Diberikan $A=\{1,2,3\}$ dan $B=\{3,4\}$. Maka

$$A\times B=\{(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,3),(3,4)\} \text{ dan}$$
$$B\times A=\{(3,1),(3,2),(3,3),(4,1),(4,2),(4,3)\}.$$

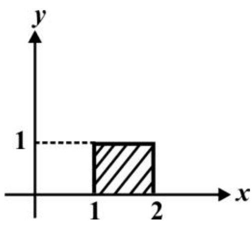
Contoh 1.2.2 Diberikan $A=\left\{x\,|\,1\le x\le 2\right\}=[1,2]$; $B=\left\{y\,|\,0\le y\le 1\right\}=[0,1]$.

Maka

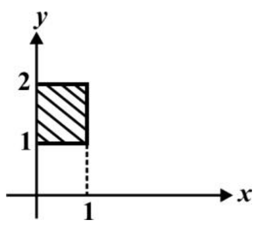
$$A\times B=\{(x,y)\,|\,1\le x\le 2,\ 0\le y\le 1\}, \text{ dan}$$
$$B\times A=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1,\ 1\le y\le 2\}.$$

Jelas bahwa $A\times B\ne B\times A$.

Gambar dari $A\times B$ dan $B\times A$ dibidang-*xy*, diberikan di bawah ini.



Gb: $A\times B=[1,2]\times[0,1]$



Gb: $B\times A=[0,1]\times[1,2]$

Teorema berikut menyangkut perkalian silang.

Teorema 1.2.3 Untuk himpunan-himpunan *A*, *B*, C dan *D* berikut berlaku:
(a) $A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$
(b) $A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$
(c) $(A\times B)\cap(C\times D)=(A\cap C)\times(B\cap D)$
(d) $(A\times B)\cup(C\times D)\subseteq(A\cup C)\times(B\cup D)$.

Bukti:
(a) ($\Rightarrow$) Akan ditunjukkan $A\times(B\cup C)\subseteq(A\times B)\cup(A\times C)$.
Ambil $(x,y)\in A\times(B\cup C)$ sebarang; maka $x\in A$, $y\in B\cup C$. Jika $y\in B$ maka $(x,y)\in A\times B$ dan jika $y\in C$ maka $(x,y)\in A\times C$. Jadi $(x,y)\in(A\times B)\cup(A\times C)$.
($\Leftarrow$) Akan ditunjukkan $(A\times B)\cup(A\times C)\subseteq A\times(B\cup C)$.
Ambil $(x,y)\in(A\times B)\cup(A\times C)$ sebarang; maka $(x,y)\in A\times B$ atau $(x,y)\in A\times C$. Jika $(x,y)\in A\times B$ maka $x\in A$, $y\in B$ sehingga $y\in B\cup C$. Ini memberikan $(x,y)\in A\times(B\cup C)$.
(b) ($\Rightarrow$) Akan ditunjukkan $A\times(B\cap C)\subseteq(A\times B)\cap(A\times C)$.
Ambil $(x,y)\in A\times(B\cap C)$ sebarang; maka $x\in A$, $y\in B\cap C$. Ini memberikan $x\in A$, $y\in B$ dan $x\in A$, $y\in C$ yang menghasilkan $(x,y)\in A\times B$ dan $(x,y)\in A\times C$.
Jadi $(x,y)\in(A\times B)\cap(A\times C)$.
($\Leftarrow$) Akan ditunjukkan $(A\times B)\cap(A\times C)\subseteq A\times(B\cap C)$.
Ambil $(x,y)\in(A\times B)\cap(A\times C)$ sebarang; maka $(x,y)\in A\times B$ dan $(x,y)\in A\times C$. Ini memberikan $x\in A$, $y\in B$ dan $y\in C$. Jadi $x\in A$, $y\in B\cap C$ sehingga berlaku $(x,y)\in A\times(B\cap C)$.
(c) ($\Rightarrow$) Akan ditunjukkan $(A\times B)\cap(C\times D)\subseteq(A\cap C)\times(B\cap D)$.
Ambil $(x,y)\in(A\times B)\cap(C\times D)$ sebarang; maka $(x,y)\in A\times B$ dan $(x,y)\in C\times D$. Ini memberikan $x\in A$, $y\in B$ dan $x\in C$, $y\in D$; yaitu $x\in A\cap C$, $y\in B\cap D$.
Jadi $(x,y)\in(A\cap C)\times(B\cap D)$.

($\Leftarrow$) Akan ditunjukkan $(A\cap C)\times(B\cap D)\subseteq(A\times B)\cap(C\times D)$.
Ambil $(x,y)\in(A\cap C)\times(B\cap D)$ sebarang; maka $x\in A\cap C$, $y\in B\cap D$, yang memberikan $x\in A$, $y\in B$ dan $x\in C$, $y\in D$. Jadi $(x,y)\in A\times B$ dan $(x,y)\in C\times D$ dan menghasilkan $(x,y)\in(A\times B)\cap(C\times D)$.

(d) Akan ditunjukkan $(A\times B)\cup(C\times D)\subseteq(A\cup C)\times(B\cup D)$.
Ambil $(x,y)\in(A\times B)\cup(C\times D)$ sebarang; maka $(x,y)\in A\times B$ atau $(x,y)\in C\times D$. Jika $(x,y)\in A\times B$ maka $x\in A$, $y\in B$. Ini memberikan $x\in A\cup C$, $y\in B\cup D$. Jadi $(x,y)\in(A\cup C)\times(B\cup D)$.
Jika $(x,y)\in C\times D$, maka $x\in C$, $y\in D$. Ini memberikan $x\in A\cup C$ dan $y\in B\cup D$. Jadi $(x,y)\in(A\cup C)\times(B\cup D)$.
Perhatikan kebalikannya *tidak berlaku*. Ambil $A=B=[0,2]$; $C=D=[1,3]$. Titik $P\left(\frac{1}{2},\frac{5}{2}\right)\in(A\cup C)\times(B\cup D)$ dan titik $P\in A\times D$ tetapi $P\notin A\times B$ dan $P\notin C\times D$. Jadi $P\notin(A\times B)\cup(C\times D)$.

Perhatian 1.2.2 Perkalian silang dua himpunan dapat diperluas untuk *n* buah himpunan seperti berikut.

Pasangan-*n* (*n* tuple) objek $a_1,a_2,\ldots,a_n$ diberikan oleh $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ yang memenuhi hubungan

$$(a_1,a_2,\ldots,a_n)=(b_1,b_2,\ldots,b_n)\Leftrightarrow a_1=b_1,a_2=b_2,\ldots,a_n=b_n.$$

Perkalian silang himpunan $A_1,A_2,\ldots,A_n$ didefinisikan sebagai

$$A_1\times A_2\times\cdots\times A_n=\{(a_1,a_2,...,a_n)\,|\,a_i\in A_i,\ i=1,2,...,n\}.$$

Ini memotivasi himpunan $\mathbb{R}^n=\underbrace{\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\cdots\times\mathbb{R}}_{n}$, yaitu ruang Euklides berdimensi-*n*.

Contoh 1.2.3 Diberikan $A_1=\{1,2\}$, $A_2=\{2,3,4\}$, dan $A_3=\{1,5\}$. Maka

$$\begin{aligned}A_1\times A_2\times A_3&=\{(a_1,a_2,a_3)\,|\,a_1\in A_1,a_2\in A_2,a_3\in A_3\}\\&=\{(1,2,1),(1,2,5),(1,3,1),(1,3,5),(1,4,1),(1,4,5),(2,2,1),(2,2,5),\\&\quad(2,3,1),(2,3,5),(2,4,1),(2,4,5)\}.\end{aligned}$$

Contoh 1.2.4:

$\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$ himpunan titik-titik di ruang dimensi-3.

$\mathbb{R}^4 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_i \in \mathbb{R},\ i = 1, 2, 3, 4\}$ himpunan titik-titik di ruang dimensi-4.

LATIHAN

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, kerjakanlah latihan berikut!

1) Untuk setiap himpunan $A_1, A_2, ..., A_n$ $(n \geq 2)$ perlihatkan bahwa
$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} (A_i - A_{i+1})\right) \cup (A_n - A_1) \cup \left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right).$$
2) Sebut $\mathbb{R}^+ = \{x \mid x > 0\}$ dan untuk setiap $r \in \mathbb{R}^+$, definisikan $A_r = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq r\}$. Tunjukkan bahwa
   a) $\bigcup_{r \in \mathbb{R}^+} A_r = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, dan
   b) $\bigcap_{r \in \mathbb{R}^+} A_r = \{0\}$.
3) Buktikan:
   a) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$
   b) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$
4) Diberikan tiga himpunan *A*, *B*, *C* dengan $A \neq \varnothing$, $B \neq \varnothing$.
   Jika $(A \times B) \cup (B \times A) = C \times C$, tunjukkan bahwa $A = B = C$.
5) Jika *A* himpunan yang terdiri dari *m* elemen dan *B* terdiri dari *n* elemen, buktikan bahwa $A \times B$ himpunan yang terdiri dari *mn* elemen.

Petunjuk Jawaban Latihan

1) ($\subseteq$) Ambil $x \in \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ sebarang. Jika $x \in A_i$, $i = 1, 2, ..., n$ maka $x \in \bigcap_{i=1}^{n} A_i$. Tanpa mengurangi keumuman, misalkan $x \notin A_1$. Jika $x \in A_n$ maka $x \in A_n - A_1$. Jika $x \notin A_n$ dan $x \in A_{n-1}$ maka $x \in A_{n-1} - A_n$ dan hubungan "$\subseteq$" terbukti. Jika $x \notin A_n$ dan $x \notin A_{n-1}$, secara induksi dapat diperlihatkan jika $x \in A_{n-2}$ maka $x \in A_{n-2} - A_{n-1}$ dan hubungan "$\subseteq$" berlaku. Tetapi jika $x \notin A_{n-2}$ maka proses pembuktian dapat dilakukan seperti di atas. Sudah pasti terdapat k dengan $2 \leq k < n$ sehingga $x \in A_k$ dan $x \notin A_{k+1}$. Dalam hal ini $x \in A_k - A_{k+1}$ dan hubungan "$\subseteq$" berlaku.

   ($\supseteq$) Jelas.

2) (b) Ambil $x \in \bigcap_{r \in \mathbb{R}^+} A_k$. Maka $x \in A_r, \forall r > 0$, yaitu $0 \leq x < r, \forall r > 0$.

   Ini memberikan $x = \{0\}$.

3) Gunakan definisi perkalian silang.

4) Tunjukkan $A = C$ dan $B = C$.

   Jika $x \in A$, kesamaan memberikan $A \subseteq C$.

   Jika $x \in B$, kesamaan memberikan $B \subseteq C$.

   Jika $x \in C$, kesamaan memberikan $C \subseteq A$ dan $C \subseteq B$.

5) Sebut anggota $A = \{a_1, a_2, ..., a_m\}$ dan $B = \{b_1, b_2, ..., b_n\}$.

   $A \times B = \{(a_1, b_j), (a_2, b_j), ..., (a_m, b_j)\}, \quad j = 1, 2, ..., n$.

RANGKUMAN

1. Bila $\{A_i \mid i \in I\}$ keluarga berindeks dari himpunan-himpunan A_i, maka

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{a \mid \exists i \in I \ni a \in A_i\}$$

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{a \mid a \in A_i, \forall i \in I\} .$$

2. Perkalian silang himpunan $A_1, A_2, ..., A_n$ didefinisikan sebagai

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, a_2, ..., a_n) \mid a_i \in A_i,\ i = 1, 2, ..., n\}.$$

TES FORMATIF 2

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat!

1) Untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, $A_n = \{n\}$. Bila $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = a$ dan $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = b$, maka ....
   A. $a = \mathbb{N}$; $b = \{0\}$
   B. $a = \mathbb{N}$; $b = \varnothing$
   C. $a = \{n\}$; $b = \{0\}$
   D. $a = \{n\}$; $b = \varnothing$

2) Untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, $A_n = \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]$. Bila $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = a$ dan $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = b$, maka ....
   A. $a = (-1,1)$, $b = \varnothing$
   B. $a = (-1,1)$, $b = \{0\}$
   C. $a = [-1,1]$, $b = \varnothing$
   D. $a = [-1,1]$, $b = \{0\}$

3) Diberikan himpunan $A_n = [n, \infty)$, $n \in \mathbb{N}$. Bila $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = a$ dan $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = b$, maka ....
   A. $a = A_1$; $b = \varnothing$
   B. $a = A_1$; $b = \{0\}$
   C. $a = A_2$; $b = \varnothing$
   D. $a = A_2$; $b = \{0\}$

4) Diberikan himpunan $A_n = (-n, n),\ n \in \mathbb{N}$. Bila $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = a$ dan $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = b$, maka ....
   A. $a = \mathbb{R},\ b = \varnothing$
   B. $a = \mathbb{R},\ b = \{0\}$
   C. $a = \mathbb{R},\ b = (-1,1)$
   D. $a = \mathbb{R},\ b = \left[-1,1\right]$

5) Misalkan $A = \{1,2\}$ dan $B = \{2,3,4\}$. Maka $A \times B$ adalah himpunan yang terdiri dari *n* elemen, dimana ....
   A. $n = 5$
   B. $n = 6$
   C. $n = 7$
   D. $n = 8$

6) Diberikan $A = [1,2]$ dan $B = [1,3]$. Maka $A \times B$ terdiri dari siku-empat (empat persegi panjang) beserta titik-titik dalamnya, dengan titik-titik sudut adalah ....
   A. $(1,1), (2,1), (3,1), (3,2)$
   B. $(1,1), (1,2), (1,3), (3,2)$
   C. $(1,1), (1,2), (3,1), (3,2)$
   D. $(1,1), (1,2), (3,1), (2,3)$

7) Misalkan $A \neq \varnothing,\ B \neq \varnothing$. Maka $A \times B = B \times A$ berlaku jika dan hanya jika ....
   A. $A \subset B$
   B. $B \subset A$
   C. $A \neq B$
   D. $A = B$

8) Jika *A*, *B* dan *C* tiga himpunan tak kosong, maka ....
   A. $A \times (B \times C) \neq (A \times B) \times C$
   B. $A \times (B \times C) \subset (A \times B) \times C$
   C. $A \times (B \times C) \supset (A \times B) \times C$
   D. $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$

9) Jika *A*, *B* dan *C* tiga himpunan tak kosong, maka ....
   A. $A\times(B-C)\neq(A\times B)-(A\times C)$
   B. $A\times(B-C)\subset(A\times B)-(A\times C)$
   C. $A\times(B-C)\supset(A\times B)-(A\times C)$
   D. $A\times(B-C)=(A\times B)-(A\times C)$

10) Jika *A*, *B* dan *C* tiga himpunan tak kosong, maka ....
   A. $A\cup(B\times C)\subset(A\times B)\cup(A\times C)$
   B. $A\cup(B\times C)\supset(A\times B)\cup(A\times C)$
   C. $A\cup(B\times C)=(A\times B)\cup(A\times C)$
   D. $A\cup(B\times C)\neq(A\times B)\cup(A\times C)$

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 2 yang terdapat di bagian akhir modul ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 2.

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{Jumlah Jawaban yang Benar}}{\text{Jumlah Soal}}\times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan: 90 - 100% = baik sekali
80 - 89% = baik
70 - 79% = cukup
< 70% = kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan modul selanjutnya. **Bagus!** Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi materi Kegiatan Belajar 2, terutama bagian yang belum dikuasai.

Kunci Jawaban Tes Formatif

Tes Formatif 1	*Tes Formatif 2*
1) B	1) B
2) C	2) D
3) D	3) A
4) B	4) C
5) A	5) B
6) C	6) C
7) A	7) D
8) C	8) A
9) B	9) D
10) D	10) D

Daftar Pustaka

Devlin, K. (1992). *Functions and Logic*. London: Chapman & Hall.

Stoll, R.R. (1976). *Set Theory and Logic*. New Delhi: Eurasia Publishing House (PVT), Ltd.

Suppes, P. (1960). *Axiomatic Set Theory*. New York: D. Van Nostrand Company, Inc.